

# Thuật toán xử lý bình sai ghép nối mạng lưới GPS vào Hệ tọa độ quốc gia

T.S.K.H. Hà Minh Hoà

KS. Nguyễn Trinh Sơn

**Viện Nghiên cứu Địa chính**

## **§ 3. Mô hình toán học của bài toán ghép nối mạng lưới GPS vào Hệ tọa độ quốc gia.**

### 1. Các vấn đề chung.

**Khi** bình sai riêng rẽ mạng lưới GPS trong Hệ tọa độ WGS - 84 với một điểm khởi tính, tọa độ không gian của điểm này được coi là có sai số được đặc trưng bởi ma trận liên hệ.

$$K_1 = 10^6 \cdot E_1, \quad (2)$$

ở đây  $E_1$  - ma trận đơn vị bậc 3; chỉ số 1 có nghĩa là điểm khởi tính được đánh số 1.

**Như** vậy bài toán bình sai mạng lưới GPS trong Hệ WGS - 84 dẫn đến bài toán bình sai có tính đến sai số số liệu gốc, ở đây số liệu gốc là tọa độ không gian của điểm khởi tính 1 với sai số được đặc trưng bởi ma trận  $K_1$  dưới dạng (2) đảm bảo điểm khởi tính là điểm cứng.

**Ma** trận chuẩn RS nhận được trong kết quả bình sai mạng lưới GPS trong Hệ WGS - 84 có dạng:

$$R_S = \hat{P}_1 + \hat{R}_S \quad (3)$$

ở đây ma trận

$$\hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 10^6 \cdot E_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (4)$$

ma trận chuẩn  $\hat{R}_s$  được lập từ các phương trình số cải chính của các trị đo GPS và suy biến với lượng hụt  $d = 3$ ; còn  $K = 3N$  - số lượng ẩn số trong lưới GPS,  $N$  - tổng số điểm GPS trong mạng lưới đang bình sai.

**Khi** sử dụng các số gia toạ độ  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  của véc tơ Baseline làm các trị đo GPS, ma trận  $\hat{R}_s$  có tính chất:

$$\hat{R}_s \cdot H = 0 \quad (5)$$

ở đây ma trận  $H$  có dạng:

$$H = [E_1 : E_2 : \dots : E_N]^T \quad (6)$$

ở đây  $E_i$  - ma trận đơn vị bậc 3,  $i = \overline{1, N}$ .

**Ma** trận liên hệ  $\bar{K}X$  trong (1) liên hệ với ma trận  $RS$  (3) theo công thức:

$$KX = r_s^2 \cdot R_s^{-1} \quad (7)$$

ở đây  $r_s$  - sai số trung phương đơn vị trọng số nhận được khi bình sai mạng lưới GPS.

**Khi** đã xác định được 7 tham số chuyển đổi toạ độ không gian từ Hệ WGS - 84 về Hệ toạ độ quốc gia, cần thiết tiến hành chuyển đổi các thông tin tiên nghiệm (1) về Hệ toạ độ quốc gia. Việc chuyển các véc tơ toạ độ không gian  $X$  từ Hệ WGS - 84 về Hệ toạ độ quốc gia và chuyển tiếp theo thành toạ độ ellipsoid  $B, L, H$  thực hiện theo các công thức đã biết trong trắc địa cao cấp. Việc chuyển ma trận liên hệ  $KX$  được thực hiện theo công thức sau:

$$KX = \theta \cdot K_{\bar{X}} \cdot \theta^T,$$

ở đây  $\theta$  - ma trận đường chéo khối bậc  $K$  với khối  $\theta_i (i = \overline{1, N})$  có dạng

$$\theta_i = (1 + \Delta m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}_z & -\mathbf{e}_y \\ -\mathbf{e}_z & 1 & \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y & -\mathbf{e}_x & 1 \end{pmatrix};$$

ở đây góc Orl  $e_x, e_y, e_z$  được biểu diễn trong đơn vị Radian.

Do các góc  $e_x, e_y, e_z$  có giá trị một vài giây, nên khi chuyển qua đơn vị Radian nhỏ bỏ qua, còn sự thay đổi tỷ lệ xích  $\Delta m$  nhỏ bậc  $10^{-6}$ , nên thực tế coi

$\theta_i = E_{3 \times 3}$ , ở đây E - ma trận đơn vị bậc 3. Do đó trong thực tế coi  $KX = K_{\bar{x}}$ .

**Khi** chuyển  $K_{\bar{x}}$  xuống ellipsoid, để tiện cho chứng minh tiếp theo, thay cho  $K_{\bar{x}}$  (7) chúng ta sẽ xem xét việc chuyển ma trận RS (3).

**Khi** đó

$$ReS = FT. RS.F \quad (8)$$

ở đây F - ma trận đường chéo khối với khối  $F_i (i = \overline{1, N})$  có dạng sau:

$$F_i = \begin{bmatrix} -(M_i + H_i). \sin B_i. \cos L_i & -(N_i + H_i). \cos B_i. \sin L_i & \cos B_i. \cos L_i \\ -(M_i + H_i). \sin B_i. \sin L_i & (N_i + H_i). \cos B_i. \cos L_i & \cos B_i. \sin L_i \\ (M_i + H_i). \cos B_i & 0 & \sin B_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

**Khi** bình sai mạng lưới GPS trong Hệ WGS - 84 áp dụng phương pháp bình sai truy hồi với phép biến đổi xoay [2] hoặc áp dụng phương pháp Choleski để giải hệ phương trình chuẩn, chúng ta sẽ nhận được ma trận tam giác trên TS liên hệ với ma trận chuẩn RS theo công thức  $RS = T_s^T . T_s$ .

Khi đó đặt:  $\bar{T}_s = T_s . F \quad (10)$

từ (8) suy ra:  $ReS = \bar{T}_s^T . \bar{T}_s$ .

**Công** thức (10) được sử dụng để chuyển ma trận tam giác trên TS từ Hệ tọa độ không gian WGS - 84 lên mặt ellipsoid trong Hệ tọa độ quốc gia.

2. Mô hình toán học bài toán bình sai ghép nối mạng lưới GPS trong Hệ tọa độ quốc gia.

Gọi  $\tau$  - véc tơ tọa độ ellipsoid B, L, H của các điểm GPS đã được tính chuyển về Hệ tọa độ quốc gia, thêm vào đó

$$\mathbf{t}^{K \times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1^{k \times 1} \\ \dots \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix}$$

ở đây  $\mathbf{t}_1$  - véc tơ con của tọa độ ellipsoid tương ứng với các điểm chung; k- số lượng các ẩn số chung. Để tiện chứng minh tiếp theo chúng ta đặt  $\mathbf{t}_1$  lên vị trí đầu tiên.

Mô hình bài toán bình sai ghép nối mạng lưới GPS trong Hệ tọa độ quốc gia có dạng sau[3]:

$$\begin{aligned} V_t &= d\mathbf{t}_1^{k \times 1}, \quad P_t = r_s^2 \cdot K_t^{-1} \\ V_S^{K \times 1} &= d\mathbf{t}_1^{k \times 1} - G_S \cdot \Delta W + L_S, \quad P_S = R_S^e \end{aligned} \quad (11)$$

ở đây  $K_t$  - ma trận liên hệ bậc  $k \times k$  của các tọa độ, độ cao trắc địa của các điểm chung trong Hệ tọa độ quốc gia;  $R_S^e$  tính theo công thức (8); số hạng tự do

$$L_S = \begin{pmatrix} t - \mathbf{t}_1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ở đây  $t$  - véc tơ tọa độ, độ cao trắc địa của các điểm chung trong Hệ tọa độ quốc gia; ma trận  $G_S$  có dạng:

$$G_S = [G_1 \quad G_2 \quad \dots \quad G_N]^T, \quad (12)$$

Khối  $G_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) có dạng:

$$G_i = \begin{bmatrix} -\frac{\sin B_i \cdot \cos L_i}{M_i + H_i} & -\frac{\sin B_i \cdot \sin L_i}{M_i + H_i} & \frac{\cos B_i}{M_i + H_i} \\ -\sec B_i \cdot \sin L_i & \sec B_i \cdot \cos L_i & 0 \\ \frac{N_i + H_i}{\cos B_i \cdot \cos L_i} & \frac{N_i + H_i}{\cos B_i \cdot \sin L_i} & \sin B_i \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$\Delta W = [d_{x_0} \quad d_{y_0} \quad d_{z_0}]^T$  - véc tơ các sai số hệ thống trong toạ độ ellipsoid được gây ra bởi sai số trong 7 tham số biến đổi toạ độ theo mô hình Bursa-Wolf.

Để triển khai thực tế khi lưu ý tồn tại ma trận  $\bar{T}_s$  được tính theo công thức (10) hệ (11) có dạng mới:

$$\begin{aligned} V_t &= dt_1^{k \times 1}, \quad P_t = r_s^2 \cdot K_t^{-1} \\ \bar{V}_s^{k \times 1} &= \bar{T}_s \cdot dt_1^{k \times 1} - \bar{G}_s \cdot dW + \bar{L}_s, \quad \bar{P}_s = E_{k \times k}, \quad (14) \end{aligned}$$

ở đây

$$\bar{G}_s = \bar{T}_s \cdot G_s; \quad \bar{L}_s = \bar{T}_s \cdot L_s; \quad E - \text{ma trận đơn vị bậc } K.$$

Như đã trình bày ở trên, việc lựa chọn điểm khởi tính để bình sai mạng lưới GPS có thể tùy tiện. Chúng ta sẽ chứng minh rằng sự định vị tạm thời toạ độ không gian của điểm khởi tính với ma trận liên hệ (2) hoàn toàn bị loại bỏ trong quá trình giải các hệ (11) hoặc (14) [4].

Từ hệ (14) chúng ta lập hệ phương trình chuẩn:

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_s^T \cdot \bar{G}_s & \vdots & -\bar{G}_s^T \bar{T}_s \\ \dots & \dots & \dots \\ -\bar{T}_s^T \cdot \bar{G}_s & \vdots & P_t + \bar{T}_s^T \bar{T}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dW \\ \dots \\ dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{G}_s^T \cdot \bar{L}_s \\ \dots \\ \bar{T}_s^T \cdot \bar{L}_s \end{bmatrix} = 0$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ trên rút ra:

$$dW = (\bar{G}_s^T \cdot \bar{G}_s)^{-1} \cdot \bar{G}_s^T \cdot \bar{T}_s \cdot (dt + L_s).$$

Đặt  $dW$  vào phương trình thứ hai và lưu ý  $R_s^e = \bar{T}_s^T \cdot \bar{T}_s$  suy ra:

$$\left[ P_t + R_s^e - \bar{T}_s^T \cdot \bar{G}_s \cdot (\bar{G}_s^T \cdot \bar{G}_s)^{-1} \cdot \bar{G}_s^T \cdot \bar{T}_s \right] dt + \left[ R_s^e - \bar{T}_s^T \cdot \bar{G}_s \cdot (\bar{G}_s^T \cdot \bar{G}_s)^{-1} \cdot \bar{G}_s^T \cdot \bar{T}_s \right] \cdot L_s = 0 \quad (15)$$

Do  $\bar{G}_S = \bar{T}_S \cdot G_S$  nên

$$\bar{T}_S^T \cdot \bar{G}_S = R_S^e \cdot G_S ; \bar{G}_S^T \cdot \bar{G}_S = G_S^T \cdot R_S^e \cdot G_S$$

Khi đó hệ (15) có dạng

$$\begin{aligned} & \left[ P_t + R_S^e - R_S^e \cdot G_S \cdot (G_S^T \cdot R_S^e \cdot G_S)^{-1} \cdot G_S^T \cdot R_S^e \right] dt + \left[ R_S^e - R_S^e \cdot G_S \cdot (G_S^T \cdot R_S^e \cdot G_S)^{-1} \cdot G_S^T \cdot R_S^e \right] \\ & L_S \\ & = 0 \quad (16). \end{aligned}$$

Lưu ý (3), từ (8) suy ra:

$$R_S^e = F^T \cdot \hat{P}_1 \cdot F + F^T \cdot \hat{R}_S \cdot F \quad (17)$$

Từ (4), (9) có thể thấy thành phần thứ nhất của công thức (17) có dạng:

$$F^T \cdot \hat{P}_1 \cdot F = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} (M_1 + H_1)^2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & (N_1 + H_1)^2 \cdot \cos^2 B_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{K \times K} = P_1^e \quad (18)$$

**Lưu ý** từ (9) và (13) rằng  $F_i \cdot G_i = E_{33}$ . Từ đây có thể thấy  $F \cdot G_S = H$ , ở đây  $H$  có dạng (6). Khi đó từ tính chất (5) có thể viết:

$$F^T \cdot \hat{R}_S \cdot F \cdot G_S = F^T \cdot \hat{R}_S \cdot H = 0 \quad (19)$$

**Lưu ý** (17) và (19), từ (16) chúng ta có:

$$\begin{aligned} & \left[ P_t + R_S^e - P_1^e \cdot G_S \cdot (G_S^T \cdot P_1^e \cdot G_S)^{-1} \cdot G_S^T \cdot P_1^e \right] dt + \left[ R_S^e - P_1^e \cdot G_S \cdot (G_S^T \cdot P_1^e \cdot G_S)^{-1} \cdot G_S^T \cdot P_1^e \right] \\ & L_S = 0 \end{aligned}$$

(20).

Trên cơ sở (13) và (18) suy ra:

$$\left(G_S^T \cdot P_1^e \cdot G_S\right)^{-1} = \hat{P}_1^{-1}, \quad (21)$$

ở đây  $\hat{P}_1$  có dạng (4) .

Lưu ý (13), (21) chúng ta có:

$$G_S \cdot \hat{P}_1^{-1} \cdot G_S^T = \left(P_1^e\right)^{-1}$$

Khi đó:

$$P_1^e \cdot G_S \cdot \left(G_S^T \cdot P_1^e \cdot G_S\right)^{-1} \cdot G_S^T \cdot P_1^e = P_1^e \quad (22)$$

**Trên** cơ sở (17), (18) và (22) có thể viết lại biểu thức (20) dưới dạng:

$$\left[P_t + F^T \cdot \hat{R}_S \cdot F\right] dt + F^T \cdot \hat{R}_S \cdot F L_S = 0 \quad (23)$$

**Trong** phương trình (23) hoàn toàn loại bỏ hệ quả của việc định vị tạm thời tọa độ không gian của điểm khởi tính với việc sử dụng ma trận liên hệ  $K_1$  dạng (2). Điều này có nghĩa là việc chọn tùy ý điểm khởi tính để bình sai mạng lưới GPS không ảnh hưởng đến kết quả bình sai ghép nối mạng lưới GPS trong Hệ tọa độ quốc gia. Tuy nhiên điểm khởi tính phải là một trong các điểm chung có tọa độ và độ cao trong Hệ tọa độ quốc gia.

**Bây** giờ chúng ta chọn thuật toán để giải hệ phương trình (14). Nếu từ hệ này chúng ta lại tiến hành lập hệ phương trình chuẩn và giải nó theo phương pháp Choleski thì đây là cách thức không hiệu quả do từ  $\bar{T}_S$  lập ma trận chuẩn

$R_S^e = \bar{T}_S^T \bar{T}_S$  đòi hỏi tốn nhiều thời gian. Nếu lưu giữ ma trận RS khi bình sai mạng lưới GPS trong Hệ WGS – 84 và tính  $R_S^e$  theo (8) đòi hỏi tốn nhiều bộ nhớ của máy tính, đặc biệt đối với mạng lưới GPS lớn.

**Phương pháp** hiệu quả nhất là áp dụng phương pháp bình sai truy hồi với việc áp dụng phương pháp biến đổi xoay [4]. Khi đó tạo ma trận khởi đầu:

$$T_0 = \begin{bmatrix} T^{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 E_{\bar{K} \times \bar{K}} & 0 \\ 0 & 0 & 10^6 E_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{(K+3) \times (K+3)}$$

ở đây  $T^{k \times k}$  - ma trận tam giác trên liên hệ với ma trận  $P_t$  trong (14) theo công thức  $P_t = T_t^T T_t$ ;  $\bar{K} = K - k$  - số lượng các ẩn số bên trong (không phải là các ẩn số chung) của mạng lưới GPS.

**Tiếp** theo thực hiện tính toán trực tiếp từ phương trình thứ hai của hệ (14) theo phương pháp bình sai truy hồi với phép biến đổi xoay.

**Theo** phương pháp được trình bày trong bài báo này đã xây dựng phần mềm Cosatter. Trong kết quả bình sai với một số mạng lưới GPS cho thấy phần mềm này và phần mềm GPSurvey cho kết quả như nhau. Phần mềm Cosatter hiện cho phép bình sai mạng lưới GPS với 2500 điểm.

**Trong** trường hợp bình sai chung mạng lưới GPS với mạng lưới trắc địa mặt đất, tiến hành bình sai riêng rẽ mạng lưới trắc địa mặt đất trên cơ sở tách ma trận chuẩn thành 2 khối tương ứng với các ẩn số bên trong và các ẩn số chung trên ellipsoid. Việc bình sai riêng rẽ mạng lưới trắc địa làm giảm nhẹ việc giải quyết bài toán xác định trọng số của các nhóm trị đo so với trường hợp bình sai chung các trị đo GPS với các trị đo mặt đất. Véc tơ tọa độ ellipsoid  $t$  và ma trận liên hệ  $K_t$  tương ứng với các ẩn số

chung sẽ được sử dụng để thành lập hệ (14). Sau khi giải quyết bài toán bình sai ghép nối trong hệ tọa độ toạ độ quốc gia nhận được giá trị cuối cùng của véc tơ  $\tilde{t}$  và ma trận liên hệ  $\tilde{K}_i$  tương ứng với các ẩn số chung. Các dữ liệu này được sử dụng tiếp theo để hiệu chỉnh toạ độ bên trong của mạng lưới trắc địa mặt đất. Vấn đề nêu trên không được xem xét trong bài báo này.